Γραμμική Άλγεβρα 1 5/11/15

Άσκηση 3

Δίνεται ο πίνακας $A=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & -7\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times 2}$. Εκφράστε τον A και τον αντίστροφο του A σαν γινόμενο στοιχειωδών πινάκων.

Λύση

$$\begin{bmatrix}\alpha & b\\ c & d\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{\quad}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & \alpha\end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc}1 & 4 & 1 & 0\\ 2 & -7 & 0 & 1\end{array}\right]\xrightarrow[E_1=M_{21}(-2)]{r_2\to r_2-r_1}\left[\begin{array}{cc|cc}1 & 4 & 1 & 0\\ 0 & -15 & -2 & 1\end{array}\right]\xrightarrow[E_2=M_2(-\frac{1}{15})]{r_2\to(-\frac{1}{15})\cdot r_2}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc}1 & 4 & 1 & 0\\ 0 & 1 & \frac{2}{15} & \frac{-1}{15}\end{array}\right]\xrightarrow[E_3=M_{12}(-4)]{r_1\to r_1-4r_2}\left[\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 7/15 & 4/15\\ 0 & 1 & 2/15 & -1/15\end{array}\right]$$

Άρα $A^{-1}=\begin{bmatrix}7/15 & 4/15\\ 2/15 & -1/15\end{bmatrix}$ και $E_3\cdot E_2\cdot E_1\cdot A=I_2$ (1)

$$(1)\xrightarrow[\text{τα δεξιά με } A^{-1}]{\text{πολλαπλασιάζοντας από}} A^{-1}=E_3\cdot E_2\cdot E_1=[M_{12}(-4)][M_2(-\tfrac{1}{15})][M_{21}(-2)]$$

$$(1)\xrightarrow[\text{αριστερά } E_1^{-1}\cdot E_2^{-1}\cdot E_3^{-1}]{\text{πολλαπλ. από τα A}}(E_1^{-1}\cdot E_2^{-1}\cdot E_3^{-1})(E_3E_2E_1)\cdot A=E_1^{-1}\cdot E_2^{-1}\cdot E_3^{-1}\Rightarrow$$

$$A=E_1^{-1}\cdot E_2^{-1}\cdot E_3^{-1}=(M_{21}(-2))^{-1}\cdot(M_2(\tfrac{1}{15}))^{-1}\cdot[M_{12}(-4)]^{-1}=$$

$[M_{21}(2)][M_2(-15)][M_{12}(4)]$, γιατί από θεωρία $(M_{ij}(\lambda))^{-1}=M_{ij}(-\lambda)$ και $(M_i(\lambda))^{-1}=M_i(\frac{1}{\lambda})$

Πρόταση:

F σώμα, $A \in F^{\nu\times\mu}$, $b \in F^{\nu\times 1}$, (Σ) το σύστημα $A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\ \vdots\\ x_\mu\end{pmatrix}=b$

δηλαδή (Σ) είναι σύστημα ν γραμμικών εξισώσεων σε μ αγνώστους.

i) Το (Σ) έχει λύση αν και μόνο αν βαθμίδα(A) = βαθμίδα(A|b).

ii) Υποθέτουμε το (Σ) έχει λύση. Τότε βαθμίδα(A) $\leq \mu$ και το σύνολο λύσεων του (Σ) εξαρτάται από $\boxed{\mu - \text{βαθμίδα}(A)}$ "παραμέτρους"

Σαν πόρισμα (Σ) έχει ΜΟΝΑΔΙΚΗ ΛΥΣΗ $\iff$ έχει λύση και μόνο μία $\iff$ βαθμίδα(A) = βαθμίδα(B) $=\mu$

Έστω $\mu=3$ (δηλαδή έχουμε σύστημα με 3 αγνώστους) και $A \in F^{6\times 3}$. Υποθέτουμε με το σύστημα έχει λύση. Τότε βαθμίδα(A) = βαθμίδα(A|b) $\leq \mu = 3$

Τέσσερις περιπτώσεις

- βαθμίδα(A) = 3 $\Rightarrow$ μοναδική λύση
- βαθμίδα(A) = 2 $\Rightarrow$ λύση με 1 "παράμετρο"
- βαθμίδα(A) = 1 $\Rightarrow$ λύση με 2 "παραμέτρους"
- βαθμίδα(A) = 0 $\Rightarrow$ λύση με 3 "παραμέτρους"

Παρατήρηση: Έστω $A \in F^{\nu\times\mu}$. Θα έχουμε βαθμίδα(A) $\leq \nu$ και βαθμίδα(A) $\leq \mu$

Ειδική Περίπτωση: Αν $F=\mathbb{R}$ ή $F=\mathbb{Q}$ ή $F=\mathbb{C}$ ή γενικά F σώμα με άπειρο το πλήθος στοιχεία. Τα παραπάνω δίνουν:

i) (Σ) αδύνατο $\iff$ βαθμίδα$(A) \neq$ βαθμίδα $(A|b)$

ii) (Σ) μοναδική λύση $\iff$ βαθμίδα $(A)=$ βαθμίδα $(A|b)=\mu$ αριθμός αγνώστων

iii) (Σ) ΑΠΕΙΡΕΣ το πλήθος εφαρμόσεις $\iff$ βαθμίδα$(A)=$ βαθμίδα$(A|b)<\mu$

Ορίζουσα τετραγωνικού Πίνακα

$$A=\begin{bmatrix} \alpha & b \\ c & d \end{bmatrix} \in F^{2\times 2}$$

Αντιστρέψιμος $\iff \alpha d-bc \neq 0_F$

Ορισμός Έστω F σώμα, $\nu \geq 1$ και $A=(\alpha_{ij})_{1\leq i,j\leq \nu} \in F^{\nu\times\nu}$. Με Επαγωγή στο ν, ορίζουμε την ορίζουσα $\det A \in F$ ως εξής

i) Αν $\nu=1$, οπότε $A=[\alpha_{11}]$, τότε $\det A=\alpha_{11}$

ii) Υποθέτουμε $\nu\geq 2$ και ότι για κάθε $(\nu-1)\times(\nu-1)$ πίνακα B έχει οριστεί η $\det B \in F$. Θέτουμε ~~detA~~

$$\det A=\alpha_{11}(\det A_{11})-\alpha_{12}(\det A_{12})+\alpha_{13}(\det A_{13})-\ldots+\ldots+(-1)^{\nu+1}\alpha_{1\nu}\det(A_{1\nu})$$

όπου A_{ij} συμβολίζουμε τον $(\nu-1)\times(\nu-1)$ υποπίνακα του A που προκύπτει από τον A με την αφαίρεση της i-στής γραμμής και της j-στήλης. Η ορίζουσα $\det A$ συχνά συμβολίζεται και $\det(A)$ ή $|A|$ $[\ldots]$, $(\ldots)$, $|\ldots|$

Παράδειγμα: Έστω $A=\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{bmatrix}\in F^{2\times 2}$. Από τον ορισμό

$\det(A)=\alpha_{11}\det(A_{11})-\alpha_{12}\det(A_{12})$

Έχουμε $A_{11}=[\alpha_{22}]$, $A_{12}=[\alpha_{21}]$. Άρα $\det A=\alpha_{11}\cdot\alpha_{22}-\alpha_{12}\cdot\alpha_{21}$

Είδαμε για τον A, A αντιστρέψιμος $\Leftrightarrow$ $\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{21}\neq 0_F$. Δηλαδή A αντιστρέφεται $\Leftrightarrow \det(A)\neq 0_F$.

Παρατήρηση: Το είδαμε για 2×2 πίνακες. Ισχύει όμως A αντιστρέψιμος $\Leftrightarrow \det(A)\neq 0_F$ για κάθε $A\in F^{\nu\times\nu}$.

Παράδειγμα: Έστω $A=\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{bmatrix}$. Από τον ορισμό

$$\det A=\alpha_{11}\cdot\det\begin{bmatrix}\alpha_{22} & \alpha_{23}\\ \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{bmatrix}-\alpha_{12}\det\begin{bmatrix}\alpha_{21} & \alpha_{23}\\ \alpha_{31} & \alpha_{33}\end{bmatrix}+\alpha_{13}\det\begin{bmatrix}\alpha_{21} & \alpha_{22}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32}\end{bmatrix}$$

Προηγούμενο παράδειγμα*

$$\alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33}-\alpha_{11}\cdot\alpha_{23}\cdot\alpha_{32}+\alpha_{12}\cdot\alpha_{21}\cdot\alpha_{33}+\alpha_{12}\cdot\alpha_{23}\cdot\alpha_{31}$$
$$+\alpha_{13}\alpha_{21}\alpha_{32}-\alpha_{13}\cdot\alpha_{22}\alpha_{31}\in F$$

$*\ \alpha_{11}(\alpha_{22}\alpha_{33}-\alpha_{23}\alpha_{32})-\alpha_{12}(\alpha_{21}\alpha_{33}-\alpha_{23}\alpha_{31})+\alpha_{13}(\alpha_{21}\alpha_{32}-\alpha_{22}\alpha_{31})$

$\alpha_{1b}\alpha_{2c}\alpha_{3d}$ με $\{b,c,d\}=\{1,2,3\}$

Παράδειγμα: $\det\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 3 & 4 & 1\\ 1 & 5 & 5\end{bmatrix}=2\begin{vmatrix}4 & 1\\ 5 & 5\end{vmatrix}-0\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & 5\end{vmatrix}+0\begin{vmatrix}3 & 4\\ 1 & 5\end{vmatrix}=$

$2\cdot(4\cdot 5-1\cdot 5)=2\cdot 15=30$

Ιδιότητες Οριζουσών

Θεώρημα (χωρίς απόδειξη)

Έστω $A, B \in F^{n \times n}$. Τότε:

i) A αντιστρέφεται $\Leftrightarrow \det A \neq 0_F$

ii) $\det(A^t) = \det A$

iii) $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$